有限温度における One-loop Effective Potential の一般公式

阪大・理　　松尾　直樹

物性，宇宙論，素粒子論の世界において，対称性の破れにともなう相転移現象は最も興味を引く研究テーマのひとつである．この相転移(特に量子効果の影響)を調べるにあたって，非常に重要な量が有効ポテンシャル(free energy)であり，これについて詳細な解析を行なうことによって現象の仕組みが明確になる．

有効ポテンシャルには，外場としてベクトル場や曲がった背景時空の影響を取り入れることが容易である(DeWitt-Schwinger の方法が便利，curvature の 2 次までは簡単に計算できる)．ここでは，それとは別の方法で**有限温度**の効果を one-loop effective potential の表式に導入した．温度は言うまでもなくあらゆる相転移現象の中でも重要なファクターである．特に初期宇宙で成立していたと考えられている超対称性は，普通の対称性とは逆に有限温度では破れることが知られている．

有限温度 one-loop effective potential の表式は，超対称な部分とそうでない部分に分けることによって，(effective mass)/(temperature) の全ての次数まで求めることができる (massless 理論の場合，effective mass∼order parameter)．以下では，システムのうちある有効質量 m を持つ部分の free energy(effective potential) を考える(全体の free energy は，それらの和で表わされる)．Free energy の有限温度部分は，ボゾン及びフェルミオン状態への斜影演算子 $P_{\mathrm{B,F}} = \left(1 \pm (-)^{\mathrm{F}}\right)/2$ を用いて，次のように supersymmetric part $\beta F^{(\mathrm{B+F})}$ と non-supersymmetric part $\beta F^{(\mathrm{B-F})}$ に分けられる．

$$
\begin{aligned}
\beta F_{eff} &= -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\,\mathrm{Tr}\left[P_{\mathrm{B}}\, e^{-s\left[(2n\pi/\beta)^2+\vec{p}_{d-1}^{\,2}+m^2\right]} + P_{\mathrm{F}}\, e^{-s\left[((2n+1)\pi/\beta)^2+\vec{p}_{d-1}^{\,2}+m^2\right]}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\frac{V_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}}\left(\frac{\pi}{s}\right)^{\frac{d-1}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left[(-)^n e^{-\frac{n^2\pi^2 s}{\beta^2}}\mathrm{tr}\,(-)^{\mathrm{F}}\mathbb{1} + e^{-\frac{n^2\pi^2 s}{\beta^2}}\mathrm{tr}\,\mathbb{1}\right]e^{-sm^2} \\
&= -\frac{V_{d-1}}{4(4\pi)^{\frac{d-1}{2}}}\int_0^\infty ds\, s^{-\frac{d+1}{2}} e^{-sm^2}\left[\vartheta_4(0, e^{-\frac{\pi^2 s}{\beta^2}})(n_{\mathrm{B}}+n_{\mathrm{F}}) + \vartheta_3(0, e^{-\frac{\pi^2 s}{\beta^2}})(n_{\mathrm{B}}-n_{\mathrm{F}})\right] \\
&\equiv \beta F^{(\mathrm{B+F})} + \beta F^{(\mathrm{B-F})}.
\end{aligned}
$$

ここで，n_{B} 及び n_{F} はそれぞれボゾン及びフェルミオンの物理的な (on-shell の) 自由度であり，d は時空間の次元である．これから楕円 theta 関数の数学的性質を用いてわかることは，supersymmetric part $\beta F^{(\mathrm{B+F})}$には発散はなく，non-supersymmetric part $\beta F^{(\mathrm{B-F})}$のうちゼロ温度の部分

$$\beta F^{(\mathrm{B-F})}_{\beta=\infty} = -\frac{1}{2(4\pi)^{d/2}}(n_{\mathrm{B}} - n_{\mathrm{F}})\,\beta\, V_{d-1}\int_{\epsilon}^{\infty} ds\, s^{-\frac{d+2}{2}} e^{-sm^2}$$

を除いた部分もまた 収束する．様々なテクニカルな手法を用いた結果，one-loop thermal effective potential の表式は

$$\begin{aligned}
V_{eff}{}^{(\beta\neq\infty)} = -\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\beta^{-d}\Bigg[& \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(1)}\,2^{d}\zeta(d)\left[\,n_{\mathrm{B}} + (1-2^{1-d})n_{\mathrm{F}}\right] \\
& - \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(2)}\,2^{d-2}\zeta(d-2)\left[\,n_{\mathrm{B}} + (1-2^{3-d})n_{\mathrm{F}}\right](m\beta)^2 \\
& + \cdots + (-)^{\frac{d}{2}-1}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{d}{2})}\,2^{2}\zeta(2)\left[\,n_{\mathrm{B}} + (1-2^{-1})n_{\mathrm{F}}\right](m\beta)^{d-2} \\
& + (-)^{\frac{d}{2}}\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\Gamma(\frac{d+1}{2})}\,n_{\mathrm{B}}(m\beta)^{d-1} \\
& + (-)^{\frac{d}{2}}\frac{1}{2\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\,(m\beta)^{d} \\
& \quad\cdot\left[(n_{\mathrm{B}}-n_{\mathrm{F}})(\log(m\beta)^2 + 2\gamma - 2\log\pi - z_{d/2}) - 4n_{\mathrm{B}}\log 2\,\right] \\
& + \sum_{k=d/2+1}^{\infty}(-)^{k}\frac{\Gamma(k-\frac{d-1}{2})}{\Gamma(k+1)}\,\pi^{d-2k-\frac{1}{2}}\,\zeta(2k-d+1) \\
& \qquad\cdot\left[\,2^{-2k+d}n_{\mathrm{B}} - (2-2^{-2k+d})\,n_{\mathrm{F}}\,\right](m\beta)^{2k}\Bigg]\,,
\end{aligned}$$

となる．奇妙な奇数次の項 $(m\beta)^{d-1}$は ボゾン部分から，いかにも one-loop potential といった感じの項 $(m\beta)^{d}\log(m\beta)^2$ は non-supersymmetric 部分からきていることが分かる．この 有限温度部分の potential は，グラフを描いてみると $m\beta = 0$ のみにおいて極小値を持ち， $m\beta$ が大きくなるにしたがって 負の方から 0 に指数関数的に近づく．実際には，更に ゼロ温度の potential 即ち classical potential と Coleman-Weinberg potential(これは $n_{\mathrm{B}} = n_{\mathrm{F}}$のとき消える) が加わり，各有効質量 m に関して 和をとったものが 求める有効ポテンシャルの表式となる． (preprint OU-HET 134)